Урок №14 (20.10.2006)
Энергия электрического поля

1. *Работа по заряду конденсатора*

Рассмотрим произвольный конденсатор, емкости C. Посчитаем работу, которую необходимо совершить для того, чтобы зарядить его до заряда Q.

Очевидно, что пока конденсатор не заряжен, работа по перемещению элементарного заряда $_\Delta q$ с одной обкладки на другую равна нулю.

Посчитаем теперь работу по перемещению элементарного заряда $_\Delta q$ при условии, что конденсатор уже заряжен до заряда q. Тогда, по определению емкости, разность потенциалов между обкладками равна $U = q/C$. Следовательно, работа которую надо совершить по перемещению заряда $_\Delta q$, равна $_\Delta A = _\Delta qU = _\Delta qq/C$, т.е. равна площади прямоугольника толщиной $_\Delta q$ и высотой q/C. Очевидно, что полная работа по заряду конденсатора от нуля до Q будет $A = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ – площадь треугольника.

Очевидно, что величина $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ – это и есть энергия заряженного конденсатора.

2. *Плотность энергии электрического поля*

Подставим выражение емкости плоского конденсатора в выражение для энергии, полученное выше: $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2V$, где V – объем внутри конденсатора.

Видно, что энергия заряженного плоского конденсатора пропорциональна объему, в котором присутствует однородное поле $\vec{E}$. Видимо, можно ввести специальную величину *плотность энергии*: $\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2$. Произвольное поле можно разбить на маленькие плоские конденсаторы, следовательно, для любого электростатического поля, приведенная выше формула верна.

3. *Превращения энергии в конденсаторах и работа источника*

Увеличим расстояние между пластинами конденсатора от d_1 до d_2 двумя способами: когда конденсатор заряжен и отсоединен от источника напряжения и когда он подсоединен к источнику U_0.

В первом случае у нас сохраняется заряд на обкладках: q. Так как работа совершается только внешними силами, то $W_2 - W_1 = A$. Но $W = \frac{q^2}{2C}$, откуда

$A = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right)$. Подставляя $q = C_1 U_1$ и $C_i = \frac{\varepsilon_0 S}{d_i}$, получим $A = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2 d_1^2}\left(d_2 - d_1\right)$.

Во втором случае изменение энергии конденсатора определяется как работой внешних сил, так и работой источника напряжения (он перемещает заряды): $W_2 - W_1 = A + A_{ист}$. Запишем: $W_2 - W_1 = \frac{C_2 U_0^2}{2} - \frac{C_1 U_0^2}{2} = \frac{U_0^2}{2}\varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)$. При этом источник совершает работу $A_{ист} = U_0\left(q_2 - q_1\right)$, где q_1 и q_2 – заряд на обкладках конденсатора до и после совершения работы соответственно. Подставляя в эту формулу выражение для заряда плоского конденсатора $q = CU = \frac{\varepsilon_0 S U}{d}$, получим $A_{ист} = U_0^2 \varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)$. Заметим, что работа источника напряжения в два раза больше изменения энергии поля в этом случае.

Обратить внимание, что в рассмотренном случае работа источника отрицательна, т.е. либо источник заряжается (аккумулятор), либо нагревается (батарея).

4. *Энергия конденсатора с диэлектриком.*

Энергия конденсатора, отсоединенного от источника напряжения, без диэлектрика равна $W = \frac{Q^2}{2C}$, а с диэлектриком $W' = \frac{Q^2}{2\varepsilon C} = \frac{W}{\varepsilon}$. Следовательно, диэлектрик «втягивается» в конденсатор.

Найдем силу втягивания диэлектрика в подключенный конденсатор: ${}_\Delta W = A_{ист} - F_{эл}\ {}_\Delta x$. Но $A_{ист} = 2{}_\Delta W$, следовательно ${}_\Delta W = F_{эл}\ {}_\Delta x$. При вдвигании в подключенный конденсатор диэлектрика на расстояние ${}_\Delta x$ объем свободного поля уменьшается на ${}_\Delta V = S_\Delta x$, а объем поля в диэлектрике на столько же возрастает: ${}_\Delta W = \left(\omega_\varepsilon - \omega\right)_\Delta V = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)E^2 S_\Delta x = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)\frac{U^2}{d^2}S_\Delta x$. Отсюда получаем, что $F_{эл} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)\frac{U^2}{d^2}S = \varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)\frac{U^2}{2}\frac{l}{d}$, где l – поперечный размер пластины.

Задачи.

1. Пусть конденсатор с квадратными пластинами $a \times a$ и расстоянием между пластинами d помещают нижним краем в жидкость с диэлектрической проницаемостью ε. На сколько поднимется жидкость в конденсаторе, если он подключен к источнику напряжения U?
2. Савченко, 6.4.11
3. Савченко, 6.4.13